

FONCTIONS RÉCIPROQUES ET SUITES RÉELLES

Exercice n°1 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2-x} & \text{si } x \in]-\infty; 2[\\ \sqrt{x-1} - \frac{2}{x} & \text{si } x \in [2; +\infty[\end{cases}$

- 1) Etudier la continuité de f en 2.
- 2) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 3) Montrer que f est strictement croissante sur $]2; +\infty[$ et déterminer $f(]2; +\infty[)$.
- 4) a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2n}$ admet une solution unique $a_n \in [2; 3] \forall n \in \mathbb{N}^*$.
b) Montrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.
c) En déduire que $(a_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°2:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ et on désigne par (ζ) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Etudier les variations de f sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variation.
b) Montrer que $\Omega(0,1)$ est un centre de symétrie pour la courbe (ζ) .
c) Etudier les branches infinies de (ζ) .
d) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} : 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
- 2) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.
- 3) Expliciter $f(x)$ pour $x \in J$.
- 4) soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - 2x$
 - a) Montrer que g est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
 - b) Montrer que la droite d'équation $(\Delta) : y = 2x$ coupe la courbe (ζ) en un point unique d'abscisse α et que

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

4) Tracer la courbe (ζ) de f dans le repère (o, \vec{i}, \vec{j}) .

5) Soit la suite U définie sur \mathbb{N} par : $1 \leq U_0 < 2\alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f\left(\frac{1}{2} U_n\right)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq U_n < 2\alpha$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| U_{n+1} - 2\alpha \right| \leq \frac{1}{4} \left| U_n - 2\alpha \right|$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| U_n - 2\alpha \right| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

d) Prouver que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°3:

Soit g la fonction définie sur $[0, 2[$ par : $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} x\right)$.

1) Montrer que g est une bijection de $[0, 2[$ sur $[0; +\infty[$.

2) Montrer que g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que $\forall x \in [0; +\infty[: (g)'(x) = \frac{4}{\pi \left(1 + x^2\right)}$.

3) Tracer dans un même repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) les courbes (ζ) et (ζ') de g et g' .

4) Soit V la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} g^{-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

a) Montrer que pour tout $n \leq k \leq 2n$: $g\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \leq g\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq g\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite V est convergente et calculer sa limite.

5) Soit f la fonction définie sur $[0, 2[$ par : $f(x) = \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} x\right)}$

a) Montrer que f est une bijection de $[0, 2[$ sur $[1; +\infty[$.

b) Montrer que f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et que $\forall x \in [1; +\infty[: (f)'(x) = \frac{8}{\pi(1+x^2)}$.

c) Prouver que pour tout $x \in [1; +\infty[: 2g(x) - f(x) = 2$.

Exercice n°4:

1) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

a) Etudier les variations de g sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variation.

b) En déduire que $g(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2+3}$ et On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Montrer que $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle I qu'on précisera.

d) Expliciter $f^{-1}(x) \quad \forall x \in I$.

3) Etudier les branches infinies de (ζ) .

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1,5 ; 2[$.

5) Soit (U_n) la suite réelle définie par : $U_0 = 1,5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n > 1$

b) Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N} ; |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

d) En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ et calculer la limite de cette suite.

6) soit la fonction h définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $h(x) = g(\sqrt{3} \tan x)$

a) Montrer que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, h(x) = 1 - \sin x$

b) Prouver que h réalise une bijection de $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ sur un intervalle J qu'on précisera.

c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J et que $(h^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}}$

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ ; 0 \leq f(x) \leq x$.

2) Soit la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \geq 0$.

b) Montrer que U_n est décroissante.

c) En déduire que U_n est convergente ; et calculer sa limite.

3) Soit la suite (V_n) définie par $V_0=1$ et $V_{n+1} = \frac{V_n}{U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} ;$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; V_{n+1} \geq \sqrt{2} V_n$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; V_n \geq (\sqrt{2})^{n-1}$.

c) Calculer alors la limite de V_n lorsque n tend vers $+\infty$.