Oscillateurs Mécaniques Libre

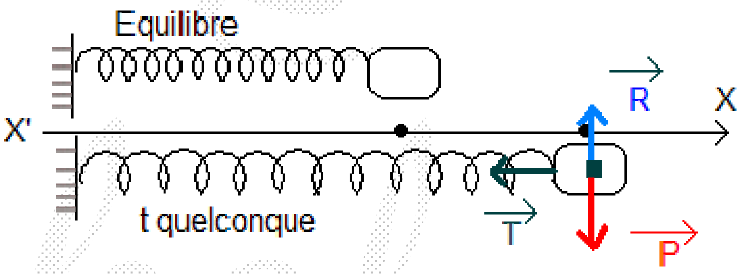
Voir Animation1

Voir Animation2

I / Oscillateurss mécanique libres non amortis :

Soit un système constitué par un solide (S) de masse m attaché à un ressort à spires non jointives , de masse négligeable et de raideur k . Ce système constitue un pendule élastique .
On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance a , puis on l'abandonne avec ou sans vitesse ; il effectue alors des oscillations rectilignes . Les forces de frottement sont supposées négligeables , les oscillations sont **non amorties** : L'oscillateur est alors dit **harmonique** .

1) Equation différentielle du mouvement :



Système = { S }

Bilan des forces ext. : $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{T}$.

R.F.D. : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\vec{a}$

Projection sur (x'x) : $-\|\vec{T}\| = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$\Rightarrow -k.x = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x = 0 \quad (*)$$

posons $\omega_o^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(*) devient $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_o{}^2x = 0$ C'est une équation différentielle qui admet comme solution $x = x_m.\sin(\omega_o t + \varphi)$

Donc , le m.v.t. est rectiligne sinusoïdal de période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

2) Conservation de l'énergie mécanique :

$x = x_m.\sin(\omega_o t + \varphi)$ et $v = \dfrac{dx}{dt} = \omega_0\, x_m.\cos(\omega_o t + \varphi)$

$$E_p = \frac{1}{2}k.x^2 = \frac{1}{2}k.x_m^2.\sin^2(\omega_o t + \varphi) = \frac{1}{4}k.x_m^2.[\,1 - \cos(2\omega_o t + 2\varphi)\,]$$

$$E_C = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}m.\omega_o{}^2.x_m^2.\cos^2(\omega_o t + \varphi) = \frac{1}{4}k.x_m^2.[\,1 + \cos(2\omega_o t + 2\varphi)\,]$$

$\omega_o{}^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow E = E_p + E_C = \dfrac{1}{2} k\,.x_m{}^2.\ \sin^2(\omega_o\, t + \varphi) + \frac{1}{2} k\,.x_m{}^2.\ \cos^2(\omega_o\, t + \varphi)$

$= \frac{1}{2} k\,.x_m{}^2.[\ \sin^2(\omega_o\, t + \varphi) + \cos^2(\omega_o\, t + \varphi)]$ D'où $E = \dfrac{1}{2} k\,.x_m{}^2 =$ **constante**

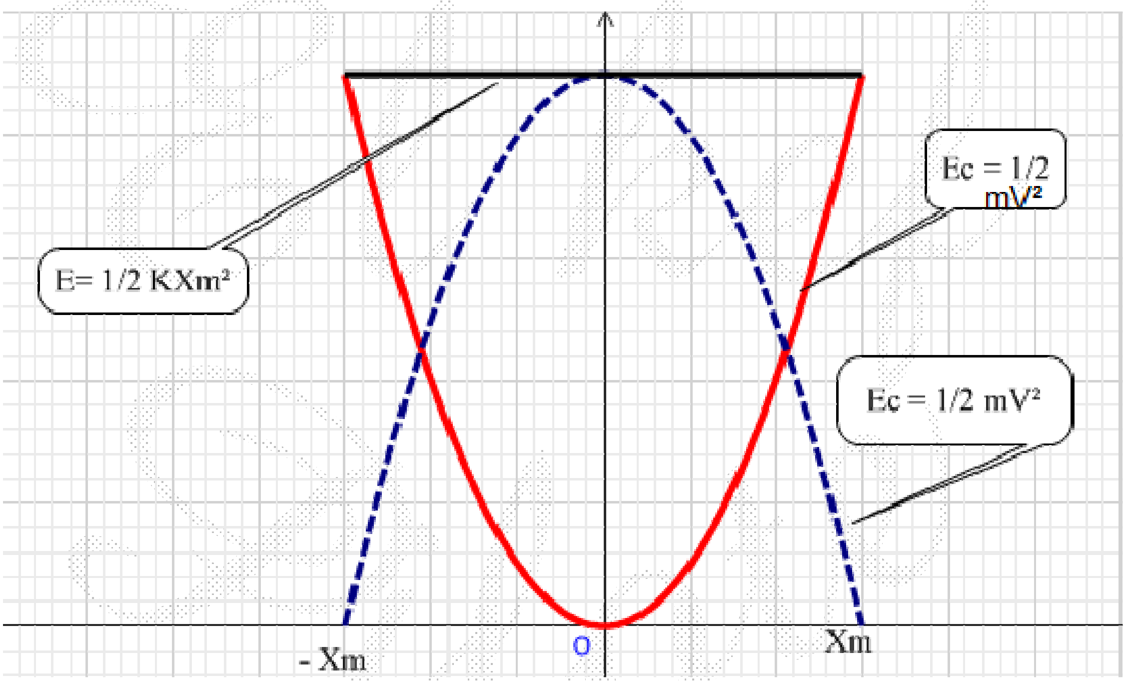
Donc , l'énergie mécanique est proportionnelle au carré de l'amplitude . pour un oscillateur non amorti ,

l'amplitude est constante , l'énergie mécanique se conserve .

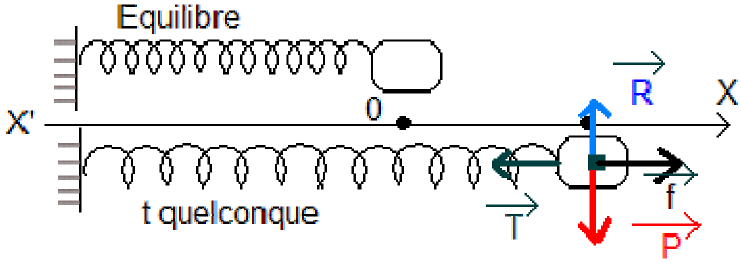
Graphes des énergies E , E_p et E_C en fonction de x :

- $E = \dfrac{1}{2} k\,.x_m{}^2$ = constante .
- $E_p = \dfrac{1}{2} k\,.x^2 \Rightarrow E_p(x)$ est une parabole

qui passe par l'origine dont la la concavité est dirigée vers le haut $(\dfrac{1}{2} k > 0)$



II / Oscillateurss mécanique libres amortis :



1) Equation différentielle :

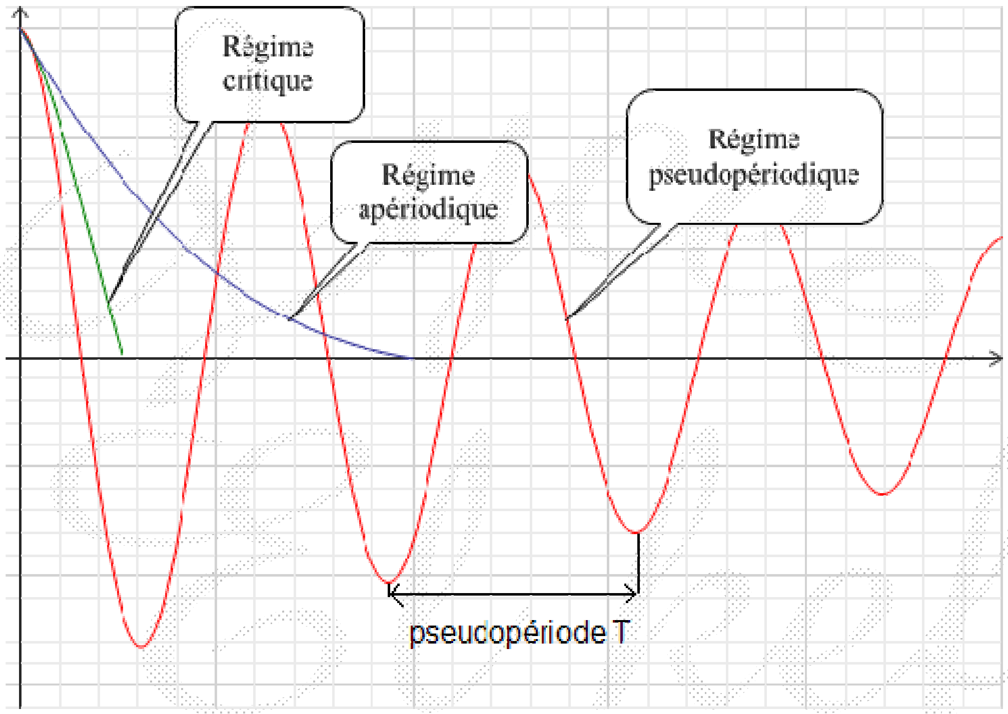
Système = { S }

Bilan des forces ext. : $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{T}$, $\vec{f}$

R.F.D. : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$ Projection sur (x'x) :

$$- \|\vec{T}\| - \|\vec{f}\| = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow -kx - hv = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{soit} \quad kx + h\frac{dx}{dt} + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Cette équation différentielle admet comme solution l'une des trois solutions suivantes :



T est légèrement supérieur à la période propre T_0 . Le régime critique correspond au retour le plus rapide à la position d'équilibre.

2) L'énergie mécanique et sa non conservation :

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 2.\ \frac{1}{2}k.x.v + 2.\ \frac{1}{2}\ \underbrace{m.v\frac{d^2x}{dt^2}} = v.(kx + m\frac{d^2x}{dt^2}) = -h.v^2 < 0$$

$\Rightarrow$ E fonction décroissante du temps .